ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

К о р с а к о в а Л.Г.

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК, КАСАЮЩИХСЯ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СВОИХ ПЛОСКОСТЕЙ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматри вается пара конгруэнций коник, касающихся линии пересече ния своих плоскостей. Введено понятие расслояемых пар ко груэнций коник такого типа (пар A) и подробно иссле ваны различные частные подклассы этих конгруэнций.

§I. Пары конгруэнций коник, касающихся линии пересечения своих плоскостей.

Рассмотрим в пространстве P_3 пару (C_1, C_2) конгруэнци (C_1), (C_2) коник, не лежащих в одной плоскости и каса щихся линии ℓ пересечения своих плоскостей α_1 и α_2 в различных точках A_1 и A_2.

Пара (C_1, C_2) называется парой A , если семейства (α_1) и (α_2) плоскостей коник конгруэнций (C_1) и (C_2) - двупараметрические.

Отнесем пару A к реперу $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где вершины A_3 и A_4 выбираются так, чтобы треугольники $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$ были автополярными треугольниками второго рода соответственно относительно коник C_1 и C_2.

нфинитезимальные перемещения репера R определяются де ивационными формулами

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4), \tag{1.1}$$

ричем пфаффовы формы ω_α^β удовлетворяют уравнениям труктуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0 . \tag{1.3}$$

Репер $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ геометрически фиксирован. Уравнения коник C_1 и C_2 относительно репера R (при надлежащей нормировке вершин A_α) имеют вид:

$$(x^2)^2 - 2x^1x^4 = 0, \quad x^3 = 0; \tag{1.4}$$

$$(x^1)^2 - 2x^2x^3 = 0, \quad x^4 = 0 \tag{1.5}$$

Обозначим

$$\omega_i^4 = \omega_i \qquad (i, j, k = 1,2) \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и суммирование по этим индексам не производится. Выбирая формы Пфаффа ω_i за независимые первичные, приводим систему пфаффовых уравнений пары A к виду:

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k,$$

$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k, \qquad (1.7)$$

$$\omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_1^1 = a^k\omega_k, \quad \omega_1^1 + \omega_4^4 - 2\omega_2^2 = b^k\omega_k,$$

причем

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \Gamma_1^{31} & \Gamma_2^{31} & \Gamma_4^{31} \\ \Gamma_1^{32} & \Gamma_2^{32} & \Gamma_4^{32} \end{pmatrix} = 2. \qquad (1.8)$$

Анализируя систему (I.7), убеждаемся, что пары A существуют и определяются с произволом двенадцати функций двух аргументов.

С парой A ассоциируются следующие основные геометрические образы.

1 Прямолинейные конгруэнции $(A_i A_3)$.

1) Конгруэнция $(A_1 A_3)$.

Фокусы $F = \lambda A_1 + \mu A_3$ луча $A_1 A_3$ и торсы конгруэнции $(A_1 A_3)$ определяются уравнениями:

$$\mu^2(\Gamma_3^{21}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{22}\Gamma_3^{41}) + \lambda\mu(\Gamma_1^{21}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{22} - \Gamma_1^{22}\Gamma_3^{41}) - \lambda^2\Gamma_1^{22} = 0, \qquad (1.9)$$

$$(\Gamma_1^{21}\Gamma^{41} - \Gamma_3^{21})(\omega_1)^2 + (\Gamma_1^{22}\Gamma_3^{41} + \Gamma_1^{21}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{22})\omega_1\omega_2 + \Gamma_1^{22}\Gamma_3^{42}(\omega_2)^2 = 0. \qquad (1.10)$$

2) Конгруэнция $(A_2 A_3)$.

Фокусы $F' = \gamma A_2 + \nu A_3$ луча $A_2 A_3$ и торсы этой конгруэнции определяются уравнениями:

$$\gamma^2\Gamma_2^{11} + \gamma\nu(\Gamma_3^{11} + \Gamma_2^{11}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{41}\Gamma_2^{12}) + \nu^2(\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{41}\Gamma_3^{12}) = 0, \qquad (1.11)$$

$$\Gamma_2^{11}\Gamma_3^{41}(\omega_1)^2 + (\Gamma_2^{12}\Gamma_3^{41} + \Gamma_2^{11}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{11})\omega_1\omega_2 + (\Gamma_2^{12}\Gamma_3^{42} - \Gamma_3^{12})(\omega_2)^2 = 0. \qquad (1.12)$$

II. Характеристические точки граней репера R.

Характеристические точки M_1, M_2, M_3, M_4 соответственно граней $(A_2A_3A_4), (A_1A_3A_4), (A_1A_2A_4), (A_1A_2A_3)$ определяются формулами:

$$M_1 = (\Gamma_3^{11}\Gamma_4^{12} - \Gamma_3^{12}\Gamma_4^{11})A_2 + (\Gamma_4^{11}\Gamma_2^{12} - \Gamma_4^{12}\Gamma_2^{11})A_3 + (\Gamma_2^{11}\Gamma_3^{12} - \Gamma_2^{12}\Gamma_3^{11})A_4, \qquad (1.13)$$

$$M_2 = (\Gamma_3^{21}\Gamma_4^{22} - \Gamma_3^{22}\Gamma_4^{21})A_1 + (\Gamma_4^{21}\Gamma_1^{22} - \Gamma_4^{22}\Gamma_1^{21})A_3 + (\Gamma_1^{21}\Gamma_3^{22} - \Gamma_1^{22}\Gamma_3^{21})A_4, \qquad (1.14)$$

$$M_3 = (\Gamma_2^{31}\Gamma_4^{32} - \Gamma_2^{32}\Gamma_4^{31})A_1 + (\Gamma_4^{31}\Gamma_1^{32} - \Gamma_4^{32}\Gamma_1^{31})A_2 + (\Gamma_1^{31}\Gamma_2^{32} - \Gamma_2^{31}\Gamma_1^{32})A_4, \qquad (1.15)$$

$$M_4 = -\Gamma_3^{41}A_1 - \Gamma_3^{42}A_2 + A_3. \qquad (1.16)$$

III. Фокальные точки коник и фокальные семейства конгруэнций (C_1) и (C_2).

Для определения фокальных точек коник и фокальных семейств конгруэнций (C_1) и (C_2) имеем соответственно системы уравнений:

$$(x^2)^2 - 2x^1x^4 = 0, \quad x^3 = 0, \qquad (1.17)$$

$$x^2(x^1)^2[\Gamma_2^{32} - \Gamma_1^{21}\Gamma_1^{32} - \Gamma_1^{31}(1 - \Gamma_1^{22})] + x^1x^2x^4[(\Gamma_2^{11} - \Gamma_4^{21})\Gamma_1^{32} + \Gamma_2^{32}b^1 -$$
$$- \Gamma_4^{32}\Gamma_1^{21} + \Gamma_1^{31}(\Gamma_4^{22} - \Gamma_2^{12}) - \Gamma_2^{31}b^2 - \Gamma_4^{31}(1 - \Gamma_1^{22})] + (x^4)^2x^1[\Gamma_1^{32}\Gamma_4^{11} + \Gamma_4^{32}b^1 -$$
$$- \Gamma_1^{31}\Gamma_4^{12} - \Gamma_4^{31}b^2] + (x^1)^3\Gamma_1^{32} + x^4(x^1)^2[\Gamma_1^{32}b^1 + \Gamma_4^{32} - \Gamma_1^{31}b^2] + (x^2)^2x^1[-\Gamma_2^{32}\Gamma_1^{21} +$$
$$+ \Gamma_2^{31}(\Gamma_1^{22} - 1)] + x^4(x^2)^2[\Gamma_2^{32}(\Gamma_2^{11} - \Gamma_4^{21}) + \Gamma_2^{31}(\Gamma_4^{22} - \Gamma_2^{12})] + (x^4)^2x^2[\Gamma_2^{32}\Gamma_4^{21} +$$
$$+ \Gamma_4^{31}(\Gamma_4^{22} - \Gamma_2^{12}) - \Gamma_4^{32}(\Gamma_4^{21} - \Gamma_2^{11}) - \Gamma_2^{31}\Gamma_4^{12}] + (x^4)^3[\Gamma_4^{32}\Gamma_4^{11} - \Gamma_4^{31}\Gamma_4^{12}] = 0.$$

$$(x^1)^2-2x^2x^3=0,\ x^4=0,$$

$$(x^2)^2x^3[a^1+\Gamma^{42}_3\Gamma^{31}_2-\Gamma^{41}_3\Gamma^{32}_2]+(x^2)^3\Gamma^{31}_2+x^2(x^3)^2[\Gamma^{21}_3+\Gamma^{42}_3a^1-\Gamma^{41}_3a^2] \quad (1.1$$
$$+x^1(x^2)^2[\Gamma^{31}_1-\Gamma^{11}_2-\Gamma^{32}_2]+x^1x^2x^3[\Gamma^{21}_1-\Gamma^{11}_3+\Gamma^{42}_3(\Gamma^{31}_1-\Gamma^{11}_2)-$$
$$-\Gamma^{41}_3(\Gamma^{32}_1-\Gamma^{12}_2)]+(x^3)^3[\Gamma^{42}_3\Gamma^{21}_3-\Gamma^{41}_3\Gamma^{22}_3]+x^1(x^3)^2[\Gamma^{42}_3(\Gamma^{21}_1-\Gamma^{11}_3)$$
$$-\Gamma^{41}_3(\Gamma^{22}_1-\Gamma^{12}_3)-\Gamma^{22}_3]-(x^1)^2x^2(\Gamma^{32}_1-\Gamma^{12}_2)-(x^1)^2x^3(\Gamma^{22}_1-\Gamma^{12}_3)=0$$

§2. Расслояемые пары конгруэнций коник.

О п р е д е л е н и е I. Пара A называется расслояемой, если существуют односторонние расслоения от конгруэнций (C_1) и (C_2) коник к многообразию (A_3A_4) прямых. [I]

Найдем систему уравнений, определяющую расслояемую пару A. Произвольную точку M коники C_2 можно определить с помощью параметра σ посредством уравнения:

$$M=\sigma A_1+\frac{1}{2}\sigma^2A_2+A_3. \quad (2.1)$$

Так как касательная плоскость к поверхности (M) должна быть инцидентна прямой A_3A_4, то

$$(dM,M,A_3,A_4)=0. \quad (2.2)$$

Раскрывая (2.2) и учитывая (2.I), получим:

$$\sigma d\sigma=\frac{1}{2}\sigma^3\omega^1_2+\sigma^2(\omega^1_1-\omega^2_2)+\sigma(\omega^1_3-2\omega^2_1)-2\omega^2_3. \quad (2.3)$$

Дифференцируя это уравнение внешним образом с использованием (2.3), получим для σ уравнение четвертой степени

$$m_{\mathcal{J}}\sigma^{\mathcal{J}}=0, \quad (\mathcal{J}=0,1,\dots,4) \quad (2.4)$$

оторое должно удовлетворяться тождественно относительно σ. Значит, $m_{\mathcal{J}}=0$. Получаем пять квадратичных уравнений

$$\omega^3_2\wedge\omega^1_3+\omega^4_2\wedge\omega^1_4=0,$$

$$\omega^1_3\wedge\omega^1_2+\omega^3_1\wedge\omega^1_3+\omega^4_1\wedge\omega^1_4-\omega^3_2\wedge\omega^2_3-\omega^4_2\wedge\omega^2_4=0,$$

$$\omega^1_3\wedge(2\omega^1_1-\omega^2_2-\omega^3_3)-2\omega^2_3\wedge\omega^1_2+\omega^4_3\wedge\omega^1_4-2\omega^3_1\wedge\omega^2_3-2\omega^4_1\wedge\omega^2_4=0,$$

$$\omega^2_3\wedge(2\omega^1_1-\omega^2_2-\omega^3_3)+\omega^1_3\wedge\omega^2_1+\omega^4_3\wedge\omega^2_4=0, \quad (2.5)$$

$$\omega^2_3\wedge(\omega^1_3-2\omega^2_1)=0.$$

Квадратичные уравнения, характеризующие расслоения от конгруэнции (C_1) к многообразию прямых A_3A_4, получаются из уравнений (2.5) подстановкой индексов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Они имеют вид:

$$\omega^4_1\wedge\omega^2_4+\omega^3_1\wedge\omega^2_3=0,$$

$$\omega^2_4\wedge\omega^2_1+\omega^4_2\wedge\omega^2_4+\omega^3_2\wedge\omega^2_3-\omega^4_1\wedge\omega^1_4-\omega^3_1\wedge\omega^1_3=0, \quad (2.7)$$

$$\omega^2_4\wedge(2\omega^2_2-\omega^1_1-\omega^4_4)-2\omega^1_4\wedge\omega^2_1+\omega^3_4\wedge\omega^2_3-2\omega^4_2\wedge\omega^1_4-2\omega^3_2\wedge\omega^1_3=0,$$

$$\omega_4^1 \wedge (2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4) + \omega_4^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_4^3 \wedge \omega_3^1 = 0,$$

$$\omega_4^1 \wedge (\omega_4^2 - 2\omega_2^1) = 0.$$

Системы уравнений (I.7),(2.5),(2.7) определяют расслоя
пары A.

Определение 2. Расслояемая пара A назы
ся парой B, если: I) точки A_3 и A_4 являются характ
тическими точками плоскостей коник C_2 и C_1, 2) касате
ные плоскости к поверхностям (A_1) и (A_2) инцидентны пр
A_3A_4[I].

Из определения пары B следует, что

$$\omega_3^4 = 0, \quad \omega_4^3 = 0, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^1 = 0.$$

Пары B удовлетворяют следующей системе пфаффовых и квадратичных уравнений:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k,$$

$$\omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k, \qquad (2.8)$$

$$\omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_1^1 = a^k\omega_k, \quad \omega_1^1 + \omega_4^4 - 2\omega_2^2 = b^k\omega_k,$$

$$\omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^1 \wedge (2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3) = 0,$$

$$\omega_3^2 \wedge (2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3) = 0, \quad \omega_3^2 \wedge \omega_3^1 = 0, \quad \omega_1 \wedge \omega_4^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = 0,$$

$$\omega_2 \wedge \omega_4^2 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \quad \omega_4^1 \wedge \omega_4^2 = 0, \qquad (2.9)$$

$$\omega_4^2 \wedge (2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4) = 0, \quad \omega_4^1 \wedge (2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4) = 0.$$

мемся исследованием системы квадратичных уравнений (2.9)
ть ни одна из форм Пфаффа ω_3^1, ω_3^2, ω_4^1, ω_4^2 не обра-
тся в нуль:

$$\omega_3^1 \omega_3^2 \omega_4^1 \omega_4^2 \neq 0. \qquad (2.10)$$

меняя лемму Картана, получим

$$\omega_3^2 = \lambda_1 \omega_3^1, \quad \omega_4^2 = \lambda_2 \omega_4^1, \quad 2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_3 \omega_3^1,$$

$$2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \lambda_4 \omega_4^1.$$

гда имеем:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{1k}\omega_k, \quad \omega_3^2 = \lambda\omega_3^1,$$

$$\omega_4^1 = \Gamma_4^{1k}\omega_k, \quad \omega_4^2 = \lambda_2\omega_4^1, \quad \omega_4^3 = \omega_3^4 = 0, \qquad (2.11)$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_3\omega_3^1, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \lambda_4\omega_4^1.$$

$$\omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0,$$

$$\omega_1 \wedge \omega_4^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = 0, \qquad (2.12)$$

$$\omega_2 \wedge \omega_4^2 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0.$$

Замыкая уравнения $\omega_3^4 = 0$, $\omega_4^3 = 0$, $\omega_i^j = 0$ и учитывая в (2.I2) все уравнения системы (2.II), получим пять конечных соотношений:

$$\Gamma_4^{11} = \Gamma_3^{11}(\lambda\Gamma_2^{31} - \Gamma_2^{32}), \qquad (2.13)$$

$$\lambda_2 \Gamma_4^{12} = \lambda_1 \Gamma_3^{11} (\Gamma_1^{32} - \lambda_1 \Gamma_1^{31}),$$

$$\Gamma_3^{11} (\lambda_1 - \lambda_2)[\lambda_2 (\lambda_1 \Gamma_2^{31} - \Gamma_2^{32}) - (\Gamma_1^{32} - \lambda_1 \Gamma_1^{31})] = 0, \qquad (2.1$$

$$\Gamma_3^{11}[\lambda_2(\Gamma_1^{32} + \lambda_2 \Gamma_2^{32})(\lambda_1 \Gamma_2^{31} - \Gamma_2^{32}) - \lambda_1(\Gamma_1^{31} + \lambda_2 \Gamma_2^{31})(\Gamma_1^{32} - \lambda_1 \Gamma_1^{31})]$$

$$\Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21}.$$

Перепишем последнее соотношение из (2.I3) в виде

$$\Gamma_3^{12} = \lambda_1 \Gamma_3^{11},$$

тогда

$$\omega_3^1 = \Gamma_3^{11} (\omega_1 + \lambda_1 \omega_2).$$

Будем исходить из третьего уравнения системы (2.I3). Отсюда видно, что возможны два случая

$$\text{I} \quad \lambda_2 (\lambda_1 \Gamma_2^{31} - \Gamma_2^{32}) = \Gamma_1^{32} - \lambda_1 \Gamma_1^{31}, \qquad (2.14)$$

$$\text{II} \quad \lambda_1 = \lambda_2 \qquad (2.15)$$

($\Gamma_3^{11} \neq 0$, иначе $\omega_3^1 = 0$, что противоречит (2.I0))

Определение 3. Пару B, для которой выполняется (2.I0), (2.I4) назовем парой B_1.

Система пфаффовых уравнений пар B_1 имеет вид:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k} \omega_k, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{11} (\omega_1 + \lambda_1 \omega_2),$$

$$\omega_4^1 = \frac{1}{\lambda_2}(\Gamma_1^{32} - \lambda_1 \Gamma_1^{31}) \omega_3^1, \quad \omega_3^2 = \lambda_1 \omega_3^1; \quad \omega_4^2 = \lambda_2 \omega_4^1, \qquad (2.16)$$

$$\omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad 2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_3 \omega_3^1, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \lambda_4 \omega_4^1.$$

и имеет место конечное соотношение

$$\Gamma_1^{32} + \lambda_2 \Gamma_2^{32} - \lambda_1 (\Gamma_1^{31} + \lambda_2 \Gamma_2^{31}) = 0. \qquad (2.17)$$

Теорема 2.I. Пары B_1 существуют и определяются с произволом восьми функций одного аргумента. Прямые $A_3 A_4$, ассоциированные с парой B_1, оп. ывают линейчатую поверхность.

Доказательство. Анализируя системы (2.I6), (2.I7), убеждаемся, что пары B_1 существуют и определяются с произволом восьми функций одного аргумента.

Имеем:

$$d[A_3A_4] = (\omega_3^3 + \omega_4^4)[A_3A_4] + \omega_3^1 \left\{[A_1A_4] + \lambda_1 [A_2A_4] + \frac{1}{\lambda_2}(\Gamma_1^{32} - \lambda_1 \Gamma_1^{31})([A_3A_1] + \lambda_2 [A_3A_2])\right\},$$

откуда непосредственно следует второе утверждение теоремы.

Определение 4. Пара B, для которой выполняется (2.I5) и (2.I0), называется парой B_2.

Пары B_2 определяются системой пфаффовых уравнений:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k} \omega_k, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{11}(\omega_1 + \lambda_1 \omega_2), \quad \omega_3^2 = \lambda_1 \omega_3^1,$$

$$\omega_4^1 = \Gamma_4^{1k} \omega_k, \quad \omega_4^2 = \lambda_1 \omega_4^1, \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \qquad (2.18)$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_3 \omega_3^1, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \lambda_4 \omega_4^1$$

и конечными соотношениями

$$\Gamma_4^{11}=\Gamma_3^{11}(\lambda_1\Gamma_2^{31}-\Gamma_2^{32}),$$

$$\Gamma_4^{12}=\Gamma_3^{11}(\Gamma_1^{32}-\lambda_1\Gamma_1^{31}),\tag{2.19}$$

$$(\Gamma_1^{31}+\Gamma_2^{32})[(\lambda_1)^2\Gamma_2^{31}+\lambda_1(\Gamma_1^{31}-\Gamma_2^{32})-\Gamma_1^{32}]=0.$$

Из (2.19) следует, что существует два класса пар B_2 : пары B_2' для которых

$$\Gamma_1^{31}+\Gamma_2^{32}=0,\tag{2.20}$$

и пары B_2'', характеризуемые условием

$$(\lambda_1)^2\Gamma_2^{31}+\lambda_1(\Gamma_1^{31}-\Gamma_2^{32})-\Gamma_1^{32}=0\tag{2.21}$$

Т е о р е м а 2.2. Пары B_2' существуют и определяются с произволом шести функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Осуществляя продолжение подсистемы (2.18)

$$\omega_3^2=\lambda_1\omega_3^1,\quad \omega_4^2=\lambda_1\omega_4^1,$$

получим:

$$d\ln\lambda_1+\omega_2^2-\omega_1^1=0.\tag{2.22}$$

Исходя из (2.22), можно произвести последнюю нормировку вершин репера R так, чтобы

$$\lambda_1=1.$$

Система пфаффовых уравнений пары B_2' запишется в виде:

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_1^3=\Gamma_1^{3k}\omega_k,\quad \omega_2^3=\Gamma_2^{31}\omega_1-\Gamma_1^{32}\omega_2,$$

$$\omega_3^1=\Gamma_3^{11}(\omega_1+\omega_2),\quad \omega_3^2=\omega_3^1,\quad \omega_1^1-\omega_2^2=0,\tag{2.24}$$

$$\omega_4^1=\Gamma_3^{11}[(\Gamma_2^{31}+\Gamma_1^{31})\omega_1+(\Gamma_1^{32}-\Gamma_1^{31})\omega_2],\quad \omega_4^2=\omega_4^1,$$

$$\omega_3^4=0;\ \omega_4^3=0;\ \omega_1^1-\omega_3^3=\lambda_3\omega_3^1,\quad \omega_1^1-\omega_4^4=\lambda_4\omega_4^1.$$

Анализируя систему (2.24), убеждаемся в справедливости теоремы 2.2.

Пары B_2'' образуют подкласс пар B_1. (выделяются из пар B_1 при $\lambda_1=\lambda_2$)

Вернемся вновь к системе (2.9). Мы показали, что при (2.10), существует только два класса пар B : B_1, B_2.

Может представиться 15 случаев, когда одна из форм ω_3^1, ω_3^2, ω_4^1, ω_4^2 обращается в нуль, две из них, три, и, наконец, все четыре обращаются в нуль. Этим перебором 15 случаев и будет полностью завершено исследование системы (2.9).

1) Пусть

$$\omega_3^1=0.\tag{2.25}$$

О п р е д е л е н и е 5. Пару B, характеризуемую условием (2.25), назовем парой B_3.

Система уравнений пары B_3 имеет вид:

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k,\quad \omega_3^1=0,\quad \omega_3^2=\Gamma_3^{22}\omega_2,$$

$$\omega_4^1=\Gamma_2^{31}\omega_3^2,\quad \omega_4^2=-\Gamma_1^{31}\omega_3^2,\quad \omega_3^4=\omega_4^3=0,\tag{2.26}$$

$$2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3=\mu\omega_2,\quad 2\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_4^4=\lambda\omega_2.$$

2)Пусть

$$\omega_3^2 = 0 \qquad (2.27)$$

Пара B ,для которой выполняется (2.27),называется парой $\widetilde{B}_3$.Пара $\widetilde{B}_3$ определяется системой уравнений Пфаффа

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{11}\omega_1, \quad \omega_3^2 = 0,$$

$$\omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_4^2 = \Gamma_1^{32}\omega_3^1, \quad \omega_4^1 = -\Gamma_2^{32}\omega_3^1, \qquad (2.28)$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \eta\,\omega_1, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \nu\,\omega_1.$$

Система (2.28) получается из системы (2.26) путем перенумерования вершин A_1 и A_2,следовательно классы B_3 и $\widetilde{B}_3$ проективно эквивалентны,то есть можно говорить об одной паре B_3.

Т е о р е м а 2.3. Пары B_3 существуют и определяются с произволом семи функций одного аргумента.Прямые A_3A_4, ассоциированные с парой B_3, описывают линейчатую поверхность.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Анализируя систему уравнений (2.26),получаем первое утверждение теоремы 2.3.

Имеем:

$$d[A_3A_4] = (\omega_3^3 + \omega_4^4)[A_3A_4] + \omega_3^2\{[A_2A_4] + \Gamma_2^{31}[A_3A_1] - \Gamma_1^{31}[A_3A_2]\},$$

откуда непосредственно следует второе утверждение теоремы.

3)

$$\omega_3^2 = 0, \quad \omega_3^1 = 0. \qquad (2.29)$$

Из системы уравнений (2.9) и условий (2.29) следует,что

и ω_4^1, ω_4^2 равны нулю,тогда каждое квадратичное уравнение системы (2.9) обращается в тождество.

О п р е д е л е н и е 6. Пара B в которой точки A_3 и A_4 неподвижны,называется парой B_4 .

Система пфаффовых уравнений пары B_4 имеет вид:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = \omega_4^2 = 0, \qquad (2.30)$$

$$\omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_1^1 = a\,\omega_k, \quad \omega_1^1 + \omega_4^4 - 2\omega_2^2 = b^k\omega_k.$$

Т е о р е м а 2.4. Пары B_4 существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. непосредственно следует из исследования системы (2.30).

4)Пусть

$$\omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^2 = 0. \qquad (2.31)$$

О п р е д е л е н и е 7. Пара B ,для которой имеют место уравнения (2.31),называется парой B_5 .

Система уравнений Пфаффа пары B_5 запишется в виде:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{11}\omega_1, \quad \omega_3^2 = \omega_4^2 = 0,$$

$$\omega_4^1 = \Gamma_3^{11}(-\Gamma_2^{32}\omega_1 + \Gamma_1^{32}\omega_2), \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \qquad (2.32)$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda\,\omega_1, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \mu\,\omega_4^1.$$

и имеет место конечное соотношение

$$\Gamma_3^{11}\Gamma_1^{32}(\Gamma_2^{32} + \Gamma_1^{31}) = 0 \qquad (2.33)$$

Из (2.33) вытекает, что существует два класса пар B_5 : пары B'_5, для которых

$$\Gamma_1^{32} = 0 \tag{2.34}$$

и пары B''_5, характеризуемые условием

$$\Gamma_2^{32} + \Gamma_1^{31} = 0 \tag{2.35}$$

($\Gamma_3^{11} \neq 0$, иначе $\omega_3^1 \neq 0$, что противоречит определению пары B_5).

5)

$$\omega_3^1 = 0, \quad \omega_4^1 = 0 . \tag{2.36}$$

Пара B, для которой имеют место уравнения (2.36), называется парой $\widetilde{B}_5$. Пара $\widetilde{B}_5$ определяется уравнениями Пфаффа :

$$\begin{gathered}\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^1 = 0, \quad \omega_3^2 = \Gamma_3^{22}\omega_2, \\ \omega_4^2 = \Gamma_3^{22}(\Gamma_2^{31}\omega_1 - \Gamma_1^{31}\omega_2), \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = \omega_4^1 = 0, \\ 2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \eta\omega_2, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \vartheta\omega_4^2\end{gathered} \tag{2.37}$$

и конечным соотношением

$$\Gamma_3^{22}\Gamma_2^{31}(\Gamma_2^{32} + \Gamma_1^{31}) = 0 . \tag{2.38}$$

Из (2.38) следует, что существует два класса пар $\widetilde{B}_5$: пары $\widetilde{B}^1_5$, для которых

$$\Gamma_2^{31} = 0 \tag{2.39}$$

и пары B''_5, характеризуемые условием

$$\Gamma_2^{32} + \Gamma_1^{31} = 0 . \tag{2.40}$$

Классы B^1_5 и $\widetilde{B}^1_5$, B''_5 и $\widetilde{B}''_5$ проективно эквивалентны, следовательно, можно говорить лишь о двух классах: парах B'_5 и B''_5.

Т е о р е м а 2.5. Пары B'_5 существуют и определяются с произволом шести функций, одного аргумента. Прямые A_3A_4 в паре B'_5 описывают линейчатую поверхность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Анализируя систему уравнений (2.32) с учетом (2.34), убеждаемся в справедливости первой части теоремы 2.5 .

Имеем:

$$d[A_3A_4] = (\omega_3^3 + \omega_4^4)[A_3A_4] + \omega_3^1\{[A_1A_4] - \Gamma_2^{32}[A_3A_1]\},$$

откуда непосредственно следует второе утверждение теоремы.

Т е о р е м а 2.6. Пары B''_5 существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Доказательство непосредственно следует из анализа системы (2.32) с учетом условия (2.35).

6)

$$\omega_3^1 = 0, \quad \omega_4^2 = 0 . \tag{2.41}$$

Пару B, для которой выполняются условия (2.4I), назовем парой B_6.

Система пфаффовых уравнений пары B_6 имеет вид:

$$\begin{gathered}\omega_i^j = 0, \quad \omega_2^3 = \Gamma^{3k}\omega_k, \quad \omega_1^3 = \lambda_2\omega_3^2, \quad \omega_3^1 = 0, \\ \omega_3^2 = \Gamma_3^{22}\omega_2, \quad \omega_4^1 = \Gamma_2^{31}\omega_3^2; \quad \omega_4^2 = \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \\ 2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_3\omega_2, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \lambda_4\omega_2 .\end{gathered} \tag{2.42}$$

7) Пусть

$$\omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^2 = 0 . \qquad (2.43)$$

Пару B для которой имеют место уравнения (2.43) назове[м] парой $\widetilde{B}_6$. Система дифференциальных уравнений пары $\widetilde{B}_6$ запишется в виде:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_1^3 = \Gamma_1^{3k}\omega_k, \quad \omega_2^3 = \lambda_1 \omega_3^1, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{11}\omega_1,$$

$$\omega_3^2 = \omega_4^1 = \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_4^2 = \Gamma_1^{32}\omega_3^1, \qquad (2.44)$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \mu_3 \omega_1, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \mu_4 \omega_1 .$$

Анализируя системы уравнений (2.42) и (2.44), убеждаемся, что классы B_6 и $\widetilde{B}_6$ —проективно эквивалентные.

Т е о р е м а 2.7. Пары B_6 существуют и определяются с произволом шести функций одного аргумента.

Анализируя систему (2.42), убеждаемся в справедливости теоремы 2.7.

Прямые A_3A_4 и в паре B_6 описывают линейчатую поверхность: $d[A_3A_4] = (\omega_3^3+\omega_4^4)[A_3A_4] + \omega_3^2\{[A_2A_4 + \Gamma_2^{31}[A_3A$

8)

$$\omega_4^1 = 0 . \qquad (2.45)$$

О п р е д е л е н и е 8. Пара B, для которой имеет ме[сто] уравнение (2.45), называется парой B_7.

Система уравнений Пфаффа пар B_7 имеет вид:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_1^3 = \Gamma_1^{3k}\omega_k, \quad \omega_2^3 = \xi_2 \omega_3^1, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{11}(\omega_1 + \xi\omega_2),$$

$$\omega_3^2 = \xi_1\omega_3^1, \quad \omega_4^1 = \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_4^2 = (\Gamma_1^{32} - \xi_1\Gamma_1^{31})\omega_3^1, \qquad (2.46)$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \xi_3\omega_3^1, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \xi_4\omega_3^1 .$$

9) Пусть

$$\omega_4^2 = 0 . \qquad (2.47)$$

Пара B, для которой выполняется (2.47), называется парой $\widetilde{B}_7$. Пара $\widetilde{B}_7$ определяется системой уравнений Пфаффа

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_2^3 = \Gamma_2^{3k}\omega_k, \quad \omega_1^3 = \lambda_1\omega_3^2, \quad \omega_3^2 = \Gamma_3^{22}(\lambda_2\omega_1 + \omega_2),$$

$$\omega_3^1 = \lambda_2\omega_3^2, \quad \omega_4^2 = \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_4^1 = (\Gamma_2^{31} - \lambda_2\Gamma_2^{32})\omega_3^2, \qquad (2.48)$$

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \lambda_3\omega_3^2, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \lambda_4\omega_3^2 .$$

Анализируя системы уравнений (2.46) и (2.48) убеждаемся, что классы B_7 и $\widetilde{B}_7$ проективно эквивалентны.

Т е о р е м а 2.8. Пары B_7 существуют и определяются с произволом семи функций одного аргумента. Прямые A_3A_4, ассоциированные с парой B_7, описывают линейчатую поверхность.

Доказательство первого утверждения теоремы следует из исследования системы уравнений (2.46).

Имеем:

$$d[A_3A_4] = (\omega_3^3+\omega_4^4)[A_3A_4] + \omega_3^1\{[A_1A_4] + \xi_1[A_2A_4] + (\Gamma_1^{32} - \xi_1\Gamma_1^{31})[A_3A_2]\},$$

откуда непосредственно следует второе утверждение теоремы 2.8.

Случаи

а/ $$\omega_4^1 = 0, \quad \omega_4^2 = 0; \qquad (2.49)$$

б/ $$\omega_4^1 = 0, \quad \omega_4^2 = 0, \quad \omega_3^1 = 0; \qquad (2.50)$$

с/ $$\omega_4^1 = 0, \quad \omega_4^2 = 0, \quad \omega_3^2 = 0; \qquad (2.51)$$

исключаются из рассмотрения, так как ранг системы форм $\{\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_4^3\}$ равен единице, что противоречит (I.8).

Таким образом, установлено существование восьми и только восьми классов пар B. Это пары $B_1, B_2', B_3, B_4, B_5', B_5'', B_6, B_7$.

§3. Геометрические свойства пар B_2'.

Т е о р е м а 3.I. Пары B_2' обладают следующими свойствами: I) поверхности (A_3) и (A_4) вырождаются в линии, 2) касательные к линиям (A_3), (A_4) пересекаются в единичной точке $E = A_1 + A_2$ прямой A_1A_2, 3) прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4) односторонне расслояемы (от прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4); не существует пар B_2' с двусторонним расслоением этих прямолинейных конгруэнций, 4) торсы прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) соответствуют координатным линиям $\omega_i = 0$. Торсы другого семейства этих прямолинейных конгруэнций соответствуют и определяются уравнением

$$\omega_1 + \omega_2 = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (2.24), имеем

$$dA_3 = \omega_3^1 (A_1 + A_2) + \omega_3^3 A_3,$$
$$dA_4 = \omega_4^1 (A_1 + A_2) + \omega_4^4 A_4 \tag{3.1}$$

откуда вытекают утверждения I) и 2) теоремы 3.I.

Уравнения

$$\omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0, \quad \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^2 = 0,$$
$$\omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0, \tag{3.3}$$

характеризующие одностороннее расслоение от конгруэнции (A_1A_2) к конгруэнции (A_3A_4), [2], обращаются в тождество в силу (2.24).

С другой стороны, учитывая (2.24) в квадратичном уравнении

$$\omega_3^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^3 - \omega_4^1 \wedge \omega_1 - \omega_4^2 \wedge \omega_2 = 0, \tag{3.4}$$

которое имеет место при двустороннем расслоении пары прямолинейных конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4), [2], получим

$$\Gamma_1^{32} - \Gamma_2^{31} - 2\Gamma_1^{31} = 0, \tag{3.5}$$

что противоречит (2.24). Следовательно, не существует пар B_2' с двусторонним расслоением этих прямолинейных конгруэнций.

Утверждение 4) теоремы непосредственно вытекает из формул (I.I0), (I.I2) с учетом (2.24).

Л и т е р а т у р а

I. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. Труды геометрического семинара. М., ВИНИТИ АН СССР, 3, I97I, стр. I93-220.

2. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., I956, стр. 66-69.